Προτασιακή Λογική

Παραδείγματα

20 / 12 / 2021

Παράδειγμα 1 – Ο κόσμος

- Ο Αντώνης σας λέει ότι χθες το πρωί: «*Έφαγα μπουγάτσα ή τοστ. Επίσης αν έφαγα ομελέτα, ήπια καφέ. Αλλά δεν ήπια τσάι.*»
- Ξέρετε ότι ο Αντώνης είναι ο μεγαλύτερος ψεύτης του κόσμου και οτιδήποτε λέει είναι ψέμα.
- Τελικά τί έφαγε αλήθεια ο Αντώνης χθες για πρωϊνό;

Προτασιακά Σύμβολα και Λογική

Παράδειγμα 1 – Προτασιακά Σύμβολα

- *Μπουγάτσα* θα παριστάνει την πρόταση «Ο Αντώνης έφαγε μπουγάτσα»
- *Τοστ* θα παριστάνει την πρόταση «Ο Αντώνης έφαγε τοστ»
- *Ομελέτα* θα παριστάνει την πρόταση «Ο Αντώνης έφαγε ομελέτα»
- *Καφές* θα παριστάνει την πρόταση «Ο Αντώνης ήπιε καφέ»
- *Τσάι* θα παριστάνει την πρόταση «Ο Αντώνης έφαγε τσάι»

Παράδειγμα 1 – Προτασιακή Λογική

- Η πρόταση «*Έφαγα μπουγάτσα ή τοστ*» παριστάνεται σε προτασιακή λογική ως:

$$\text{Μπουγάτσα} \vee \text{Τοστ}$$

- Η πρόταση «*Αν έφαγα ομελέτα, ήπια καφέ*» παριστάνεται σε προτασιακή λογική ως:

$$\text{Ομελέτα} \Rightarrow \text{Καφές}$$

Παράδειγμα 1 – Προτασιακή Λογική

- Η πρόταση «*Αλλά δεν ήπια τσάι*» παριστάνεται σε προτασιακή λογική ως:

$$\neg \text{ Τσάι}$$

Παράδειγμα 1 – Βάση Γνώσης

Όμως ξέρουμε ότι ο Αντώνης είναι ψεύτης άρα θα πάρουμε την άρνηση των παραπάνω:

¬ (Μπουγάτσα V Τοστ)

¬ (Ομελέτα ⇒ Καφές)

¬ (¬Τσάι)

CNF

Συζευκτική
Κανονική
Μορφή

CNF - Βήμα 1. Απαλοιφή διπλών συνεπαγωγών

- $(\phi \Leftrightarrow \psi) \equiv (\phi \Rightarrow \psi \land \psi \Rightarrow \phi)$

propositional.pdf : σελίδα 68

CNF - Βήμα 2. Απαλοιφή απλών συνεπαγωγών

- $\phi \Rightarrow \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$

Παράδειγμα 1 – Μετατροπή σε CNF – Βήμα 2

¬ (Μπουγάτσα V Τοστ)

¬ (¬ Ομελέτα V Καφές)

¬(¬Τσάι)

CNF - Βήμα 3. Μετακίνηση των αρνήσεων (¬) προς τα μέσα

- $\neg\neg\phi \equiv \phi$
- $\neg(\phi \vee \psi) \equiv \neg\phi \wedge \neg\psi$
- $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv \neg\phi \vee \neg\psi$

propositional.pdf : σελίδα 68

Παράδειγμα 1 – Μετατροπή σε CNF – Βήμα 3

¬ Μπουγάτσα ∧ ¬ Τοστ

¬ ¬ Ομελέτα ∧ ¬ Καφές

¬ ¬ Τσάι

Παράδειγμα 1 – Μετατροπή σε CNF – Βήμα 3

¬ Μπουγάτσα Λ ¬ Τοστ

Ομελέτα Λ ¬ Καφές

Τσάι

CNF - Βήμα 4. Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα του ∨ ως προς το ∧

- $(\phi \land \psi) \lor \theta \equiv (\phi \lor \theta) \land (\psi \lor \theta)$
- $\theta \lor (\phi \land \psi) \equiv (\theta \lor \phi) \land (\theta \lor \psi)$

propositional.pdf : σελίδα 69

CNF – Βήμα 5 & Βήμα 6

Απλοποιούμε συζεύξεις και διαζεύξεις απαλείφοντας παρενθέσεις που δεν χρειάζονται

Απαλείφουμε το σύμβολο ∧ και έχουμε μια λίστα από διαζεύξεις (φράσεις)

propositional.pdf : σελίδα 69

Παράδειγμα 1 – Μετατροπή σε CNF – Βήμα 6

¬ Μπουγάτσα

¬ Τοστ

Ομελέτα

¬ Καφές

Τσάι

Παράδειγμα 1 – Ανάλυση

- Αν και είναι προφανής η απάντηση πλέον, πρέπει να συνεχίσουμε με την <u>ανάλυση</u> για να έχουμε ισχυρή απόδειξη.
- Έχουμε να δείξουμε δηλαδή ότι ισχύουν οι φράσεις **Ομελέτα** και **Τσάι**

Παράδειγμα 1 – Ανάλυση

¬ Μπουγάτσα

¬ Τοστ

Ομελέτα

¬ Καφές

Τσάι

¬ Μπουγάτσα

¬ Τοστ

¬ Ομελέτα

¬ Καφές

¬ Τσάι

Παράδειγμα 1 – Ανάλυση

- Από τα λεκτικά ¬ Ομελέτα και Ομελέτα έχουμε την κενή φράση (αντίφαση)
- Το ίδιο και από τα λεκτικά Τσάι και ¬ Τσάι : έχουμε την κενή φράση (αντίφαση)
- Προφανώς δεν ισχύει το ίδιο για τα λεκτικά ¬ Μπουγάτσα, ¬ Τοστ, ¬ Καφές

Παράδειγμα 1 – Απάντηση

Άρα ο Αντώνης έφαγε **ομελέτα** και ήπιε **τσάι**

Παράδειγμα 2

- Αν P ⇒ Q και Q ⇒ R, μπορώ να πω ότι P ⇒ R ?
- Δηλαδή $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \models (P \Rightarrow R)$?
- *Προσοχή στα σύμβολα!* Χρησιμοποιούμε $\models$ για να πούμε «έπεται λογικά» και $\Rightarrow$ για τη συνεπαγωγή.

Λογική Κάλυψη και Μη ικανοποιησιμότητα

- Έστω φ και ψ προτάσεις της προτασιακής λογικής. Τότε $\varphi \vDash \psi$ ανν $\varphi \land \neg\psi$ είναι μη ικανοποιήσιμη.

propositional.pdf : σελίδα 47

Χρήση του κανόνα της Ανάλυσης

- Ο κανόνας της ανάλυσης χρησιμοποιείται για να δείξουμε ότι ένα σύνολο φράσεων S είναι μη ικανοποιήσιμο.
- Αυτό αποδεκνύεται αν με τη χρήση του κανόνα της ανάλυσης φτάσουμε σε **αντίφαση**, δηλαδή σε δύο λεκτικά που το ένα είναι η άρνηση του άλλου.
- Αν εφαρμόσουμε ανάλυση σε αυτά τα λεκτικά, φτάνουμε στην **κενή φράση**

propositional.pdf : σελίδες 77- 78

Παράδειγμα 2 – μετατροπή σε CNF

- Έχουμε την υπόθεση P ⇒ Q με CNF (*βήμα απαλοιφής απλών συνεπαγωγών*): ¬ P V Q
- Αντίστοιχα για την υπόθεση Q ⇒ R : ¬ Q V R

Παράδειγμα 2 – μετατροπή σε CNF

- Θέλω να αποδείξω $P \Rightarrow R$
- Κάνοντας CNF (βήμα απαλοιφής απλών συνεπαγωγών): $\neg P \vee R$

Παράδειγμα 2 – Ανάλυση

- Πρόταση Π1: $\neg P \vee Q$
- Πρόταση Π2: $\neg Q \vee R$
- Από την Π1: $\neg P \vee Q$ και την Π2: $\neg Q \vee R$ παίρνω

  την πρόταση Π3: $\neg P \vee R$

Παράδειγμα 2 – Ανάλυση

- Έχω να αποδείξω την: $\neg P \lor R$ άρα θα έχω και την πρόταση Π4: $\neg (\neg P \lor R)$
- Από την πρόταση Π3: $\neg P \lor R$ και την πρόταση Π4: $\neg (\neg P \lor R)$ έχουμε την κενή φράση (αντίφαση)

propositional.pdf : σελίδες 83-84

Παράδειγμα 2 – Αποτέλεσμα

- Χρησιμοποιώντας ανάλυση, καταλήξαμε σε **κενή φράση**
- Έτσι αποδείξαμε ότι $P \Rightarrow R$

Πίνακες Αληθείας

Λογική Κάλυψη

- ΄Εστω φ και ψ προτάσεις της προτασιακής λογικής.
- Θα λέμε ότι η φ καλύπτει λογικά (entails) την ψ ή ότι η ψ έπεται λογικά από την φ ή ότι η ψ είναι λογική συνέπεια της φ (συμβολισμός: $\varphi \vDash \psi$) αν για κάθε ερμηνεία I τέτοια ώστε I(φ) = true ισχύει ότι I(ψ) = true.

Παράδειγμα 2 – Πίνακες Αληθείας

			φ		ψ
P	**Q**	**R**	**P ⇒ Q** **¬ P ∨ Q**	**Q ⇒ R** **¬ Q ∨ R**	**P ⇒ R** **¬ P ∨ R**
true	true	true	**true**	**true**	**true**
true	true	false	true	false	false
true	false	true	false	true	true
true	false	false	false	true	false
false	true	true	**true**	**true**	**true**
false	true	false	true	false	true
false	false	true	**true**	**true**	**true**
false	false	false	**true**	**true**	**true**

Παράδειγμα 2 – Πίνακες Αληθείας

- Για κάθε ερμηνεία I τέτοια ώστε $I(\neg P \vee Q$ και $\neg Q \vee R) = true$ ισχύει ότι $I(\neg P \vee R) = true$.
- Άρα η $P \Rightarrow R$ έπεται λογικά από τις $P \Rightarrow Q$ και $Q \Rightarrow R$

Ερώτημα από Piazza

Υπάρχει κάτι σαν επιμεριστικότητα της σύζευξης ως προς την συνεπαγωγή?

Για παράδειγμα είναι ισοδύναμο να πούμε ότι:

$$A \land (B \Rightarrow C) \equiv (A \land B) \Rightarrow (A \land C)$$

Κάνοντας κάποιους πίνακες αλήθειας για διάφορες ερμηνείες των A, B, C μου βγαίνουν ίδιες τιμές και θεωρώ ότι ισχύει αλλά πως μπορώ να το αποδείξω ;

Παράδειγμα 3 – Πίνακες Αληθείας

				φ			ψ
A	B	C	B ⇒ C ¬ B ∨ C	A Λ (¬ B ∨ C)	¬ A V ¬ B	A ∧ C	(A ∧ B) ⇒ (A ∧ C) (¬ A V ¬ B) ∨ (A ∧ C)
true	true	true	true	true	false	true	true
true	true	false	false	false	false	false	false
true	false	true	true	true	true	true	true
true	false	false	true	true	true	false	true
false	true	true	true	false	true	false	true
false	true	false	false	false	true	false	true
false	false	true	true	false	true	false	true
false	false	false	true	false	true	false	true

Παράδειγμα 3 – Ερώτημα από Piazza

- **φ**: $A \land (B \Rightarrow C)$
- **ψ**: $(A \land B) \Rightarrow (A \land C)$
- Θέλω να δω αν $\phi \equiv \psi$

Παράδειγμα 3 – Ερώτημα από Piazza

- Θα μπορούσε η ανάλυση να μας βοηθήσει να αποδείξουμε ότι δεν ισχύει η ισοδυναμία;

Ισοδυναμία

- Έστω φ και ψ προτάσεις της προτασιακής λογικής.
- Θα λέμε ότι η φ είναι ισοδύναμη (equivalent) με την ψ (συμβολισμός: $\varphi \equiv \psi$) αν $\varphi \vDash \psi$ και $\psi \vDash \varphi$.
- Τότε $\varphi \vDash \psi$ ανν $\boldsymbol{\varphi \land \neg\psi}$ είναι μη ικανοποιήσιμη
- Και $\psi \vDash \varphi$ ανν $\boldsymbol{\psi \land \neg\phi}$ είναι μη ικανοποιήσιμη

propositional.pdf : σελίδα 48

Εάν ίσχυε η ισοδυναμία:

- Θα έπρεπε δηλαδή να υπολογίσω το **¬ψ** δηλαδή το ¬ ((A ∧ B) ⇒ (A ∧ C)), να πάρω και το **φ** και να καταλήξω σε κενή φράση
- Αντίστοιχα θα έπρεπε να υπολογίσω το **¬φ** δηλαδή το ¬(A ∧ (B ⇒ C)), να πάρω και το **ψ** και να καταλήξω πάλι σε κενή φράση

Τι γίνεται όμως όταν δεν ισχύει η ισοδυναμία;

- Αν το δοκιμάσετε θα δείτε ότι δε μπορείτε να βγάλετε την κενή φράση
- Αυτό όμως <u>δεν</u> είναι καλή απόδειξη του ότι η ισοδυναμία δεν ισχύει!
- Η ισχυρή απόδειξη είναι αυτή που δείξαμε αρχικά χρησιμοποιώντας την ερμηνεία και τους πίνακες αληθείας.

Ευχαριστώ

Ερωτήσεις ?

Μην ξεχνάτε το Piazza!