

Φροντιστήριο Τεχνητής Νοημοσύνης

Συμπερασμός στη Λογική Πρώτης Τάξης

Διδάσκων: Μανόλης Κουμπαράκης

Βοηθός: Χαράλαμπος Νικολάου

Συμπερασμός στη Λογική Πρώτης Τάξης

Περιεχόμενα

1. Ενοποίηση
2. Προς τα Εμπρός Αλυσίδα Εκτέλεσης
3. Προς τα Πίσω Αλυσίδα Εκτέλεσης
4. Ανάλυση

Ενοποίηση Τύπων – Έννοιες

- Δύο τύποι ϕ_1, ϕ_2 είναι ενοποιήσιμοι αν υπάρχει αντικατάσταση θ που όταν εφαρμοστεί στους δύο τύπους ϕ_1, ϕ_2 , τους κάνει ίδιους συντακτικά. Δηλαδή:

$$SUBST(\theta, \phi_1) = SUBST(\theta, \phi_2)$$

- Μία αντικατάσταση θ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο της μορφής $\{v_1/t_1, \dots, v_n/t_n\}$, όπου
 - κάθε v_i είναι μία μεταβλητή και κάθε t_i είναι ένας όρος διαφορετικός από τη v_i ,
 - οι μεταβλητές v_i, \dots, v_n είναι διαφορετικές μεταξύ τους, και
 - καμιά μεταβλητή v_i δεν εμφανίζεται σε κάποιο t_i .
- Δείτε τον Αλγόριθμο Ενοποίησης (επόμενη διαφάνεια).

Ένας Αλγόριθμος Ενοποίησης

```
function UNIFY( $x, y$ ) returns the mgu of  $x$  and  $y$   
  if  $x = y$  then return {}  
  if VARIABLE( $x$ ) then return UNIFY-VAR( $x, y$ )  
  if VARIABLE( $y$ ) then return UNIFY-VAR( $y, x$ )  
  if CONSTANT( $x$ ) or CONSTANT( $y$ ) then return failure  
  if not(LENGTH( $x$ )=LENGTH( $y$ )) then return failure  
   $i \leftarrow 0$ ;  $\gamma \leftarrow \{\}$   
  tag if  $i = \text{LENGTH}(x) + 1$  then return  $\gamma$   
     $\sigma \leftarrow \text{UNIFY}(\text{PART}(x, i), \text{PART}(y, i))$   
    if  $\sigma = \text{failure}$  then return failure  
     $\gamma \leftarrow \text{COMPOSE}(\gamma, \sigma)$   
     $x \leftarrow \text{SUBST}(\gamma, x)$   
     $y \leftarrow \text{SUBST}(\gamma, y)$   
     $i \leftarrow i + 1$   
  goto tag
```

Ένας Αλγόριθμος Ενοποίησης

```
function UNIFY-VAR( $x, y$ ) returns a substitution  
  if  $x$  occurs in  $y$  then return failure  
  return {  $x/y$  }
```

Προς τα Εμπρός Αλυσίδα Εκτέλεσης

Η Προς τα Εμπρός Αλυσίδα Εκτέλεσης (forward chaining) είναι ένας αλγόριθμος συμπερασμού που βασίζεται στον κανόνα συμπερασμού (Γενικευμένο) Τρόπο του Θέτειν:

$$\frac{a, a \Rightarrow b}{b} \quad \text{ή} \quad \frac{p', p \Rightarrow q}{SUBST(\theta, q)} \quad \text{όπου } SUBST(\theta, p') = SUBST(\theta, p)$$

Ο αλγόριθμος προς τα εμπρός αλυσίδας εκτέλεσης εφαρμόζεται σε βάσεις γνώσης που αποτελούνται από οριστικές προτάσεις (Horn).

Προς τα Εμπρός Αλυσίδα Εκτέλεσης

Θεωρήστε τις παρακάτω προτάσεις:

- Η ταινία *MouieA* είναι κωμωδία και θα προβληθεί στην τηλεόραση την Δευτέρα.
- Στον Γιάννη αρέσουν οι κωμωδίες.
- Ο Γιάννης τη Δευτέρα δεν δουλεύει.
- Κάποιος σε μια συγκεκριμένη μέρα έχει ελεύθερο χρόνο αν εκείνη τη μέρα δεν δουλεύει.
- Κάποιος θα παρακολουθήσει μια ταινία, αν αυτή προβάλλεται στην τηλεόραση κάποια μέρα που έχει ελεύθερο χρόνο και αν του αρέσει αυτή η ταινία.

Προς τα Εμπρός Αλυσίδα Εκτέλεσης

Οι προηγούμενες προτάσεις μπορούν να εκφραστούν με τις επόμενες οριστικές προτάσεις:

$$\textit{Comedy}(\textit{MovieA})$$
$$\textit{Comedy}(x) \Rightarrow \textit{Likes}(\textit{John}, x)$$
$$\textit{MovieIsOnTV}(\textit{MovieA}, \textit{Monday})$$
$$\textit{NotWorks}(\textit{John}, \textit{Monday})$$
$$\textit{NotWorks}(y, z) \Rightarrow \textit{HasFreeTime}(y, z)$$
$$\textit{Likes}(p, m) \wedge \textit{HasFreeTime}(p, d) \wedge \textit{MovieIsOnTV}(m, d)$$
$$\Rightarrow \textit{WillWatch}(p, m)$$

Ερώτηση: Τί μπορούμε να συμπεράνουμε από τη δοθείσα βάση γνώσης;

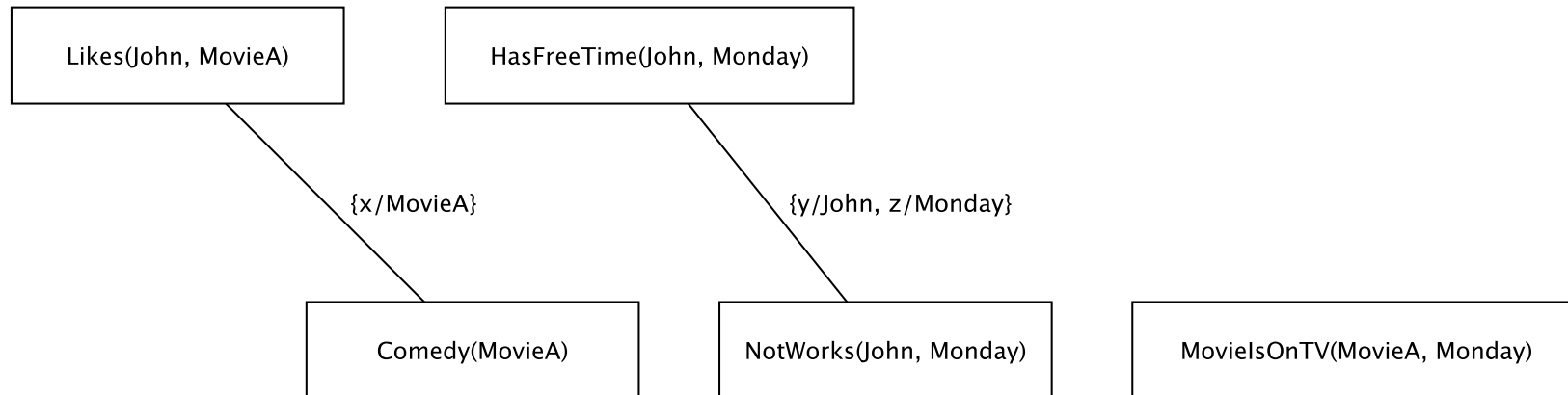
Προς τα Εμπρός Αλυσίδα Εκτέλεσης

Comedy(MovieA)

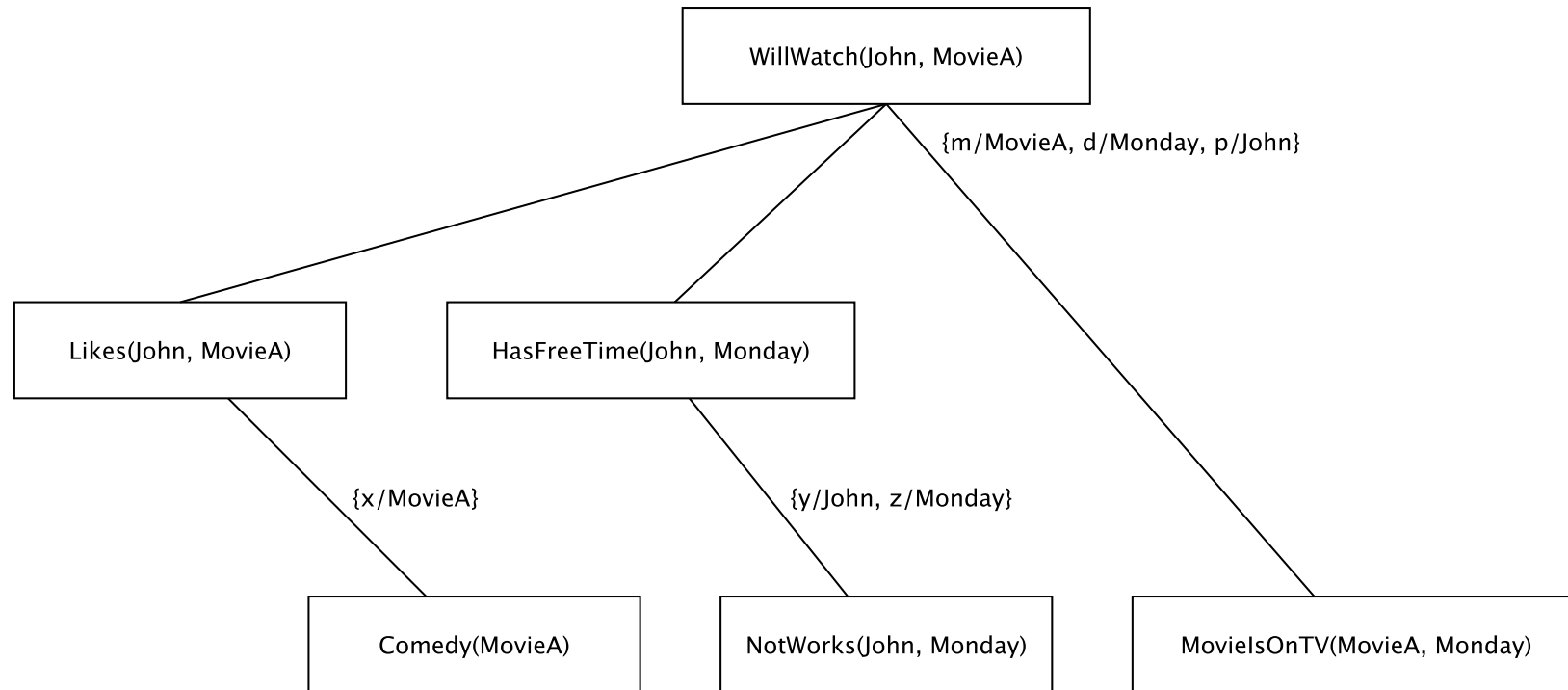
NotWorks(John, Monday)

MovielsOnTV(MovieA, Monday)

Προς τα Εμπρός Αλυσίδα Εκτέλεσης



Προς τα Εμπρός Αλυσίδα Εκτέλεσης



Προς τα Πίσω Αλυσίδα Εκτέλεσης

Ο αλγόριθμος της προς τα πίσω αλυσίδας εκτέλεσης (**backward chaining**) ξεκινάει με ένα γεγονός που θέλουμε να αποδείξουμε, βρίσκει ένα κανόνα που μας επιτρέπει να το συμπεράνουμε, και προσπαθεί να αποδείξει ότι ισχύει το σώμα του κανόνα.

Προς τα Πίσω Αλυσίδα Εκτέλεσης

function FOL-BC-ASK($KB, goals, \theta$) **returns** a set of substitutions

inputs: KB , a knowledge base

$goals$, a list of conjuncts forming a query (θ already applied)

θ the current substitution, initially the empty substitution

local variables: $answers$, a set of substitutions, initially empty

if $goals$ is empty **then return** $\{\theta\}$

$q' \leftarrow \text{SUBST}(\theta, \text{FIRST}(goals))$

for each formula r in KB which after standardization of variables becomes

$p_1 \wedge \dots \wedge p_n \Rightarrow q$ and $\theta' \leftarrow \text{UNIFY}(q', q)$ succeeds **do**

$new_goals \leftarrow [p_1, \dots, p_n | \text{REST}(goals)]$

$answers \leftarrow \text{FOL-BC-ASK}(KB, new_goals, \text{COMPOSE}(\theta, \theta')) \cup answers$

return $answers$

Προς τα Πίσω Αλυσίδα Εκτέλεσης

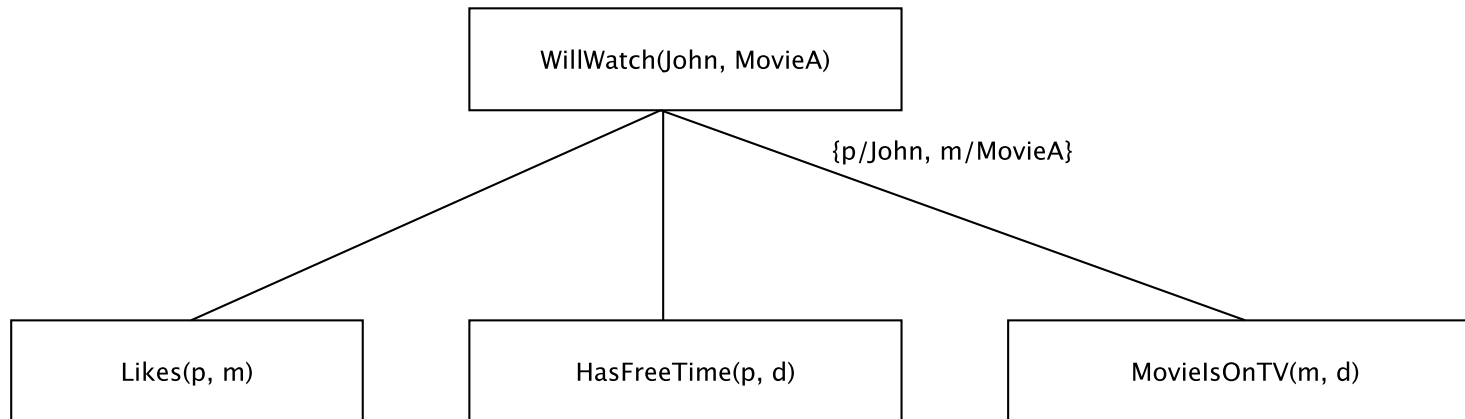
Θεωρήστε την προηγούμενη βάση γνώσης.

Ερώτηση: Αληθεύει το γεγονός ότι 'ο Γιάννης θα δει τη ταινία MovieA';

Προς τα Πίσω Αλυσίδα Εκτέλεσης

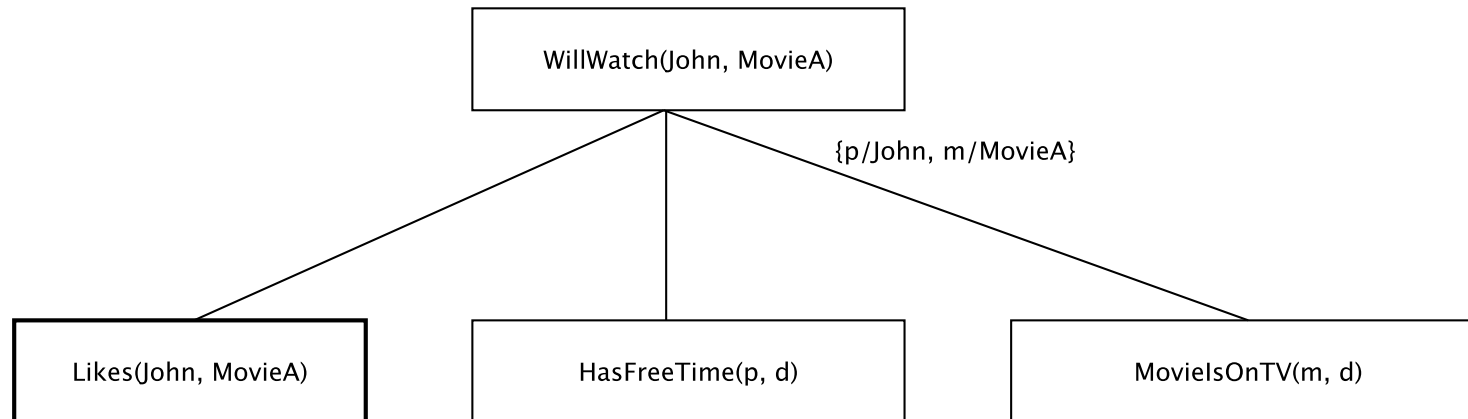
WillWatch(John, MovieA)

Προς τα Πίσω Αλυσίδα Εκτέλεσης



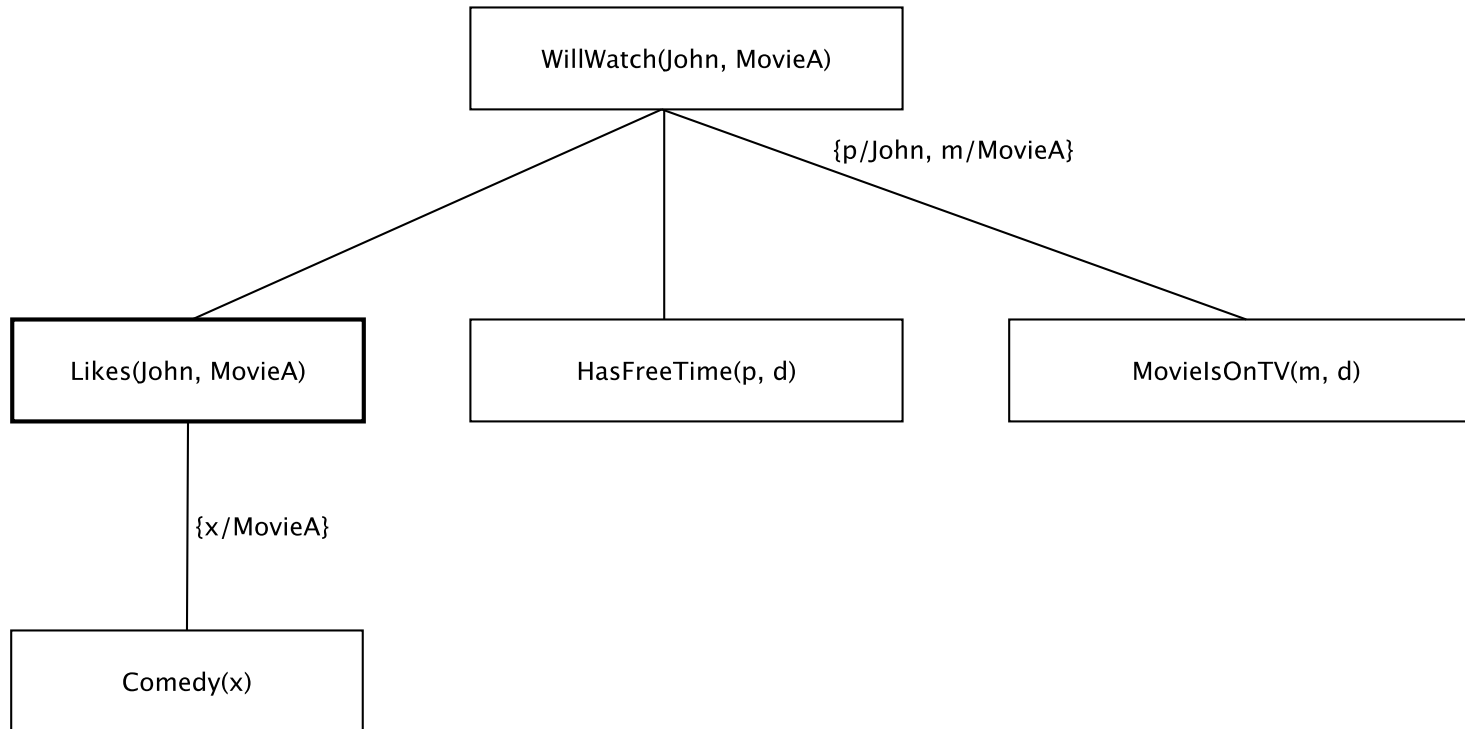
$$\theta = \{p/\text{John}, m/\text{MovieA}\}$$

Προς τα Πίσω Αλυσίδα Εκτέλεσης



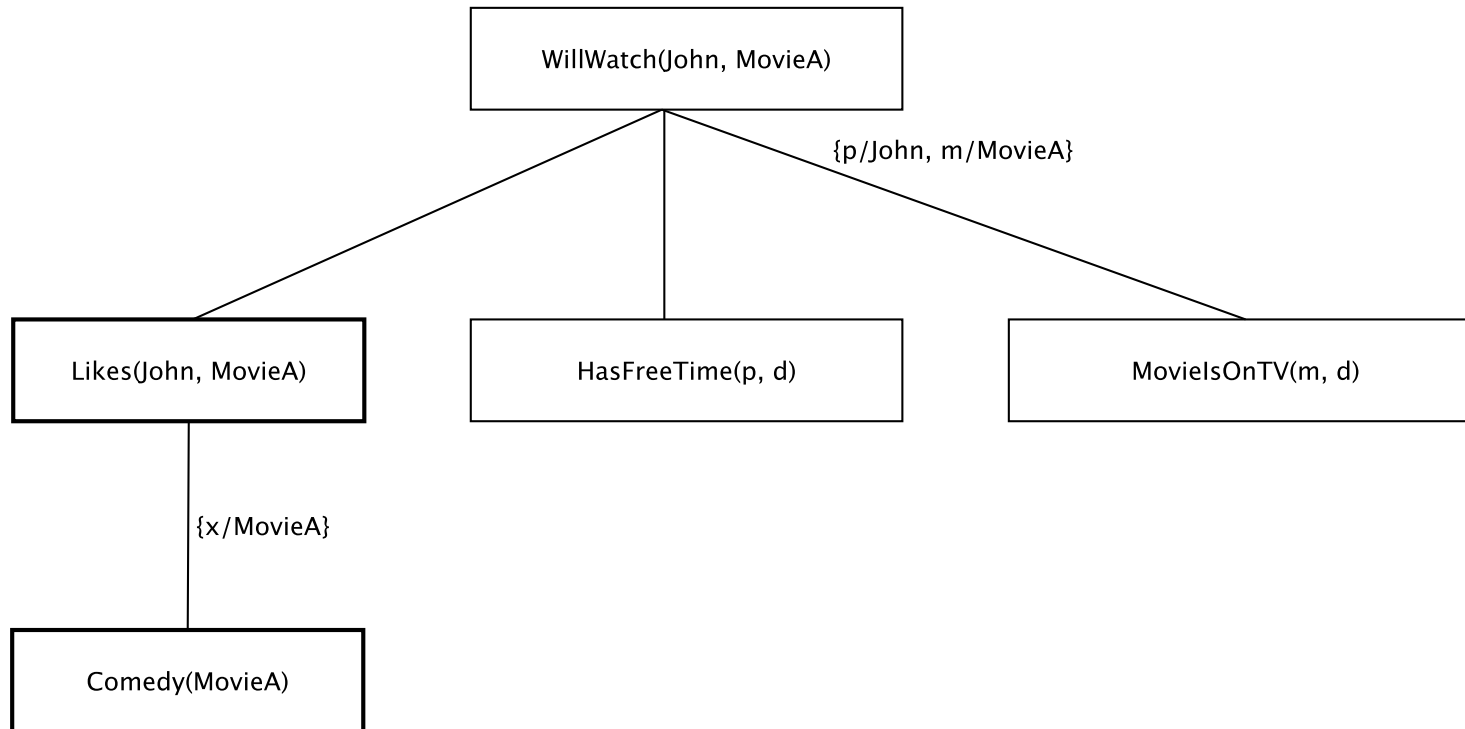
$$\theta = \{p/\text{John}, m/\text{MovieA}\}$$

Προς τα Πίσω Αλυσίδα Εκτέλεσης



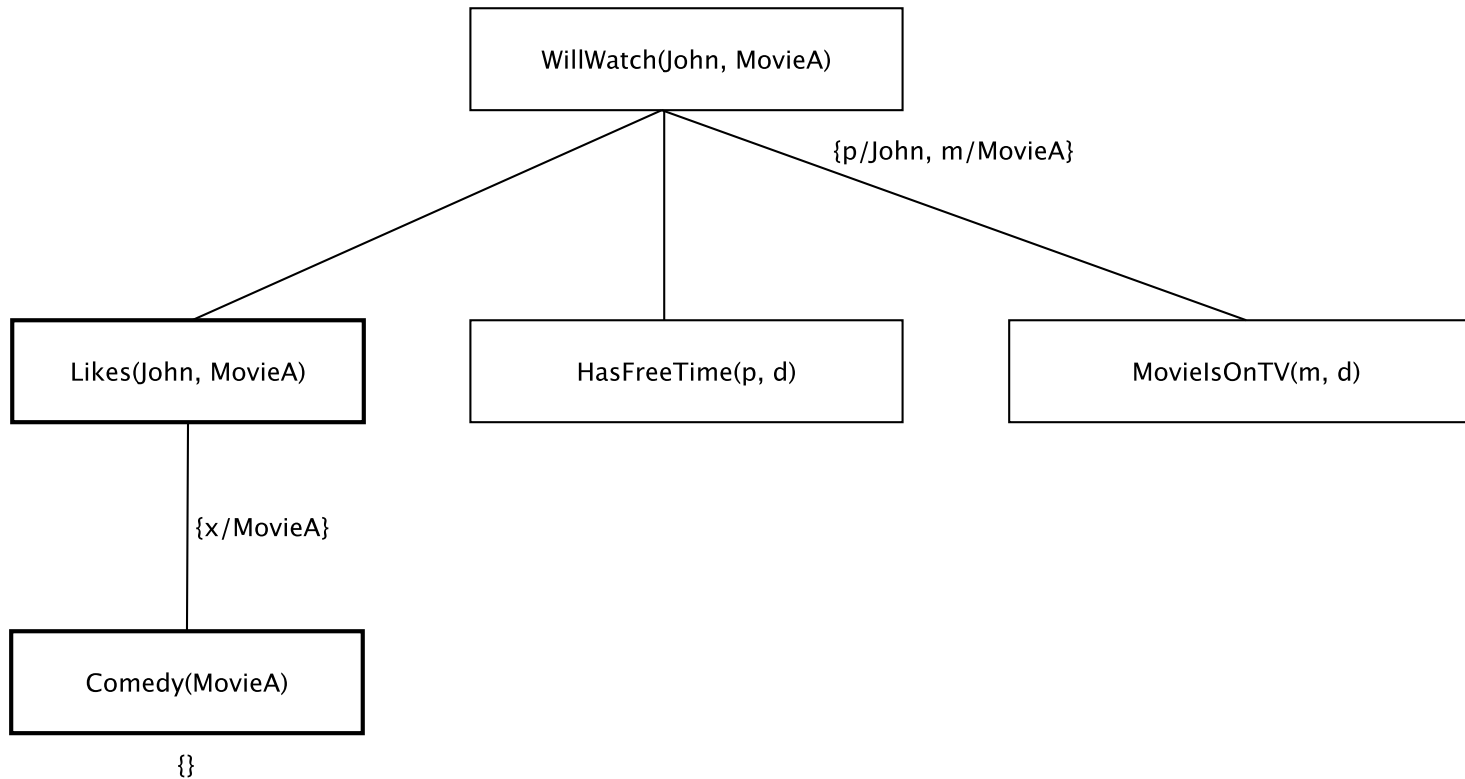
$$\theta = \{p/John, m/MovieA\}$$

Προς τα Πίσω Αλυσίδα Εκτέλεσης



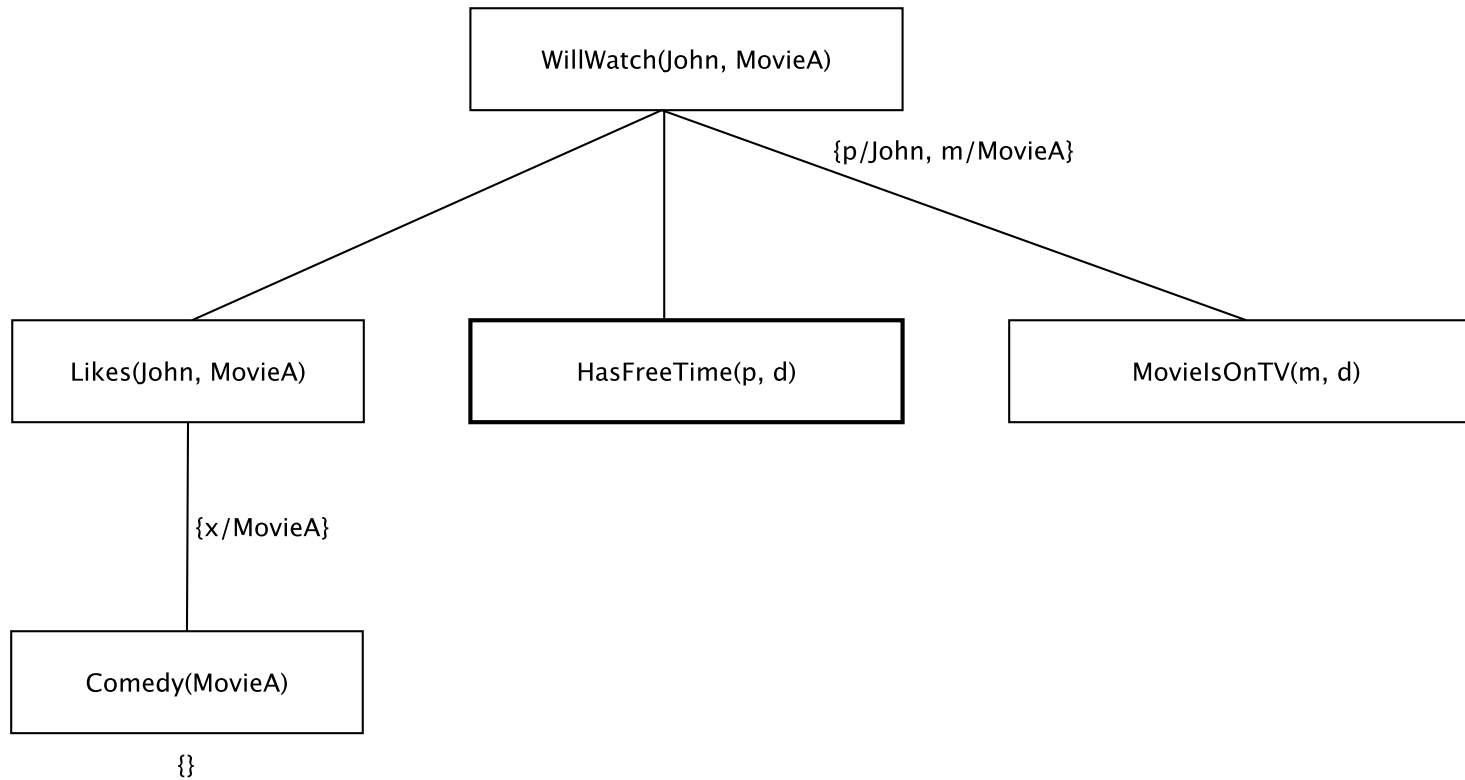
$$\theta = \{p/\text{John}, m/\text{MovieA}, x/\text{MovieA}\}$$

Προς τα Πίσω Αλυσίδα Εκτέλεσης



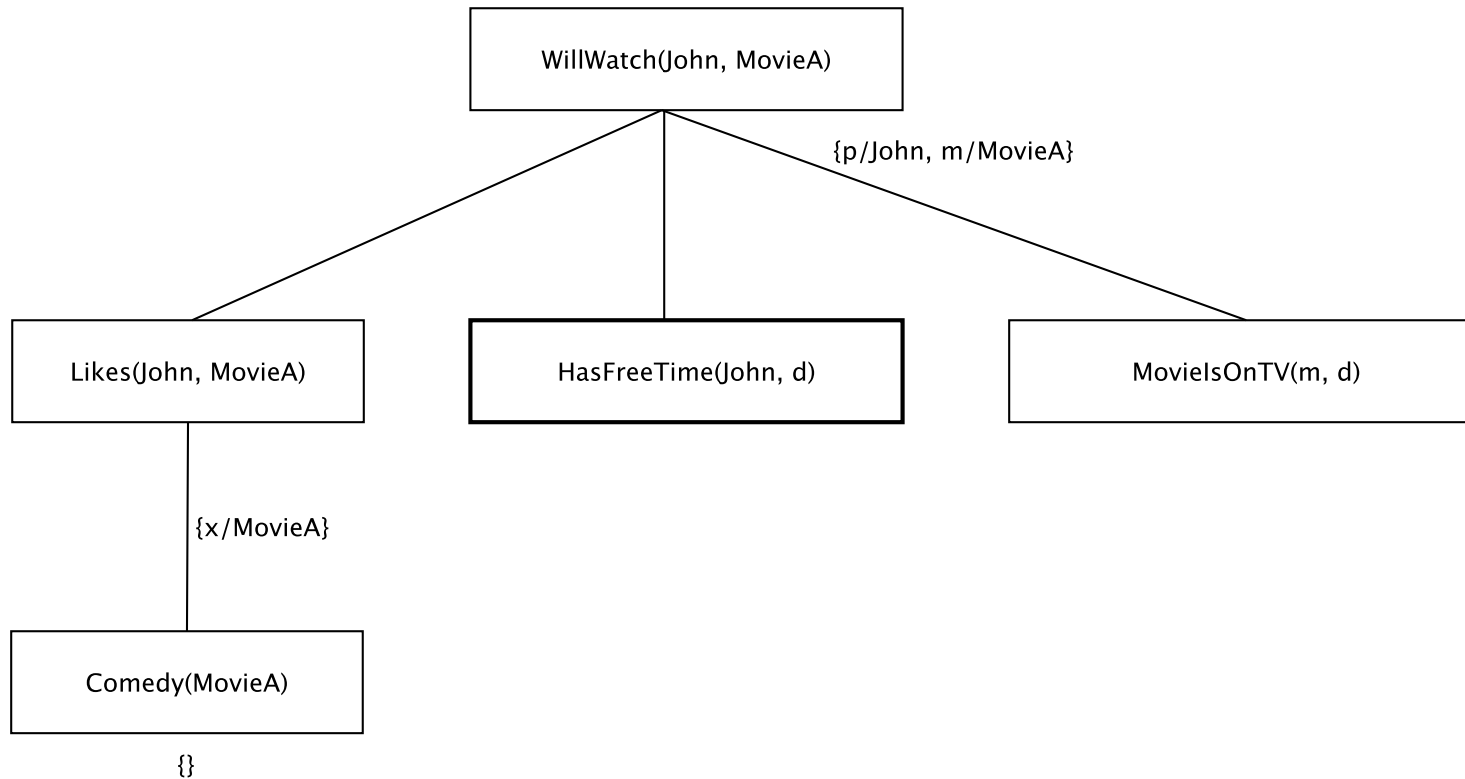
$$\theta = \{p/\text{John}, m/\text{MovieA}, x/\text{MovieA}\}$$

Προς τα Πίσω Αλυσίδα Εκτέλεσης



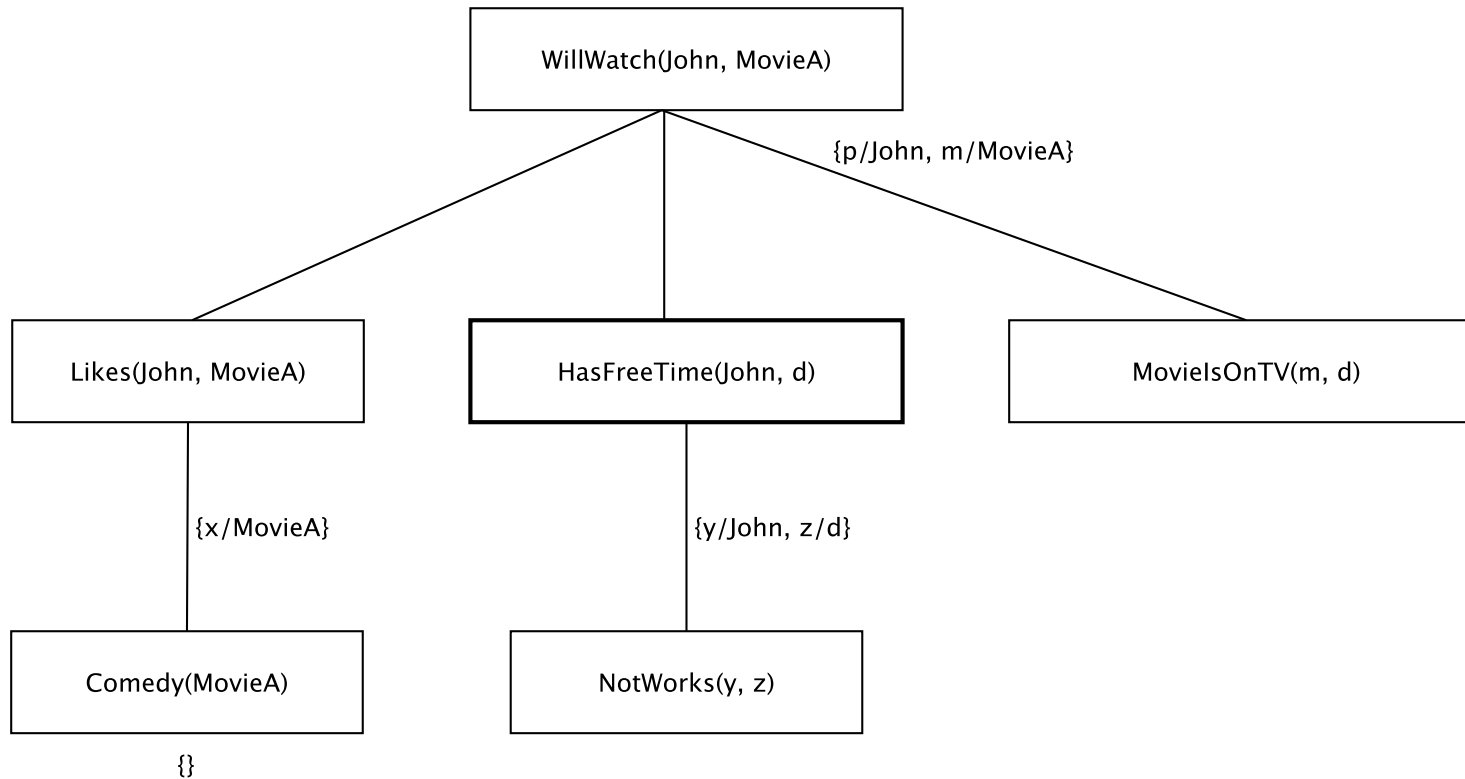
$$\theta = \{p/\text{John}, m/\text{MovieA}, x/\text{MovieA}\}$$

Προς τα Πίσω Αλυσίδα Εκτέλεσης



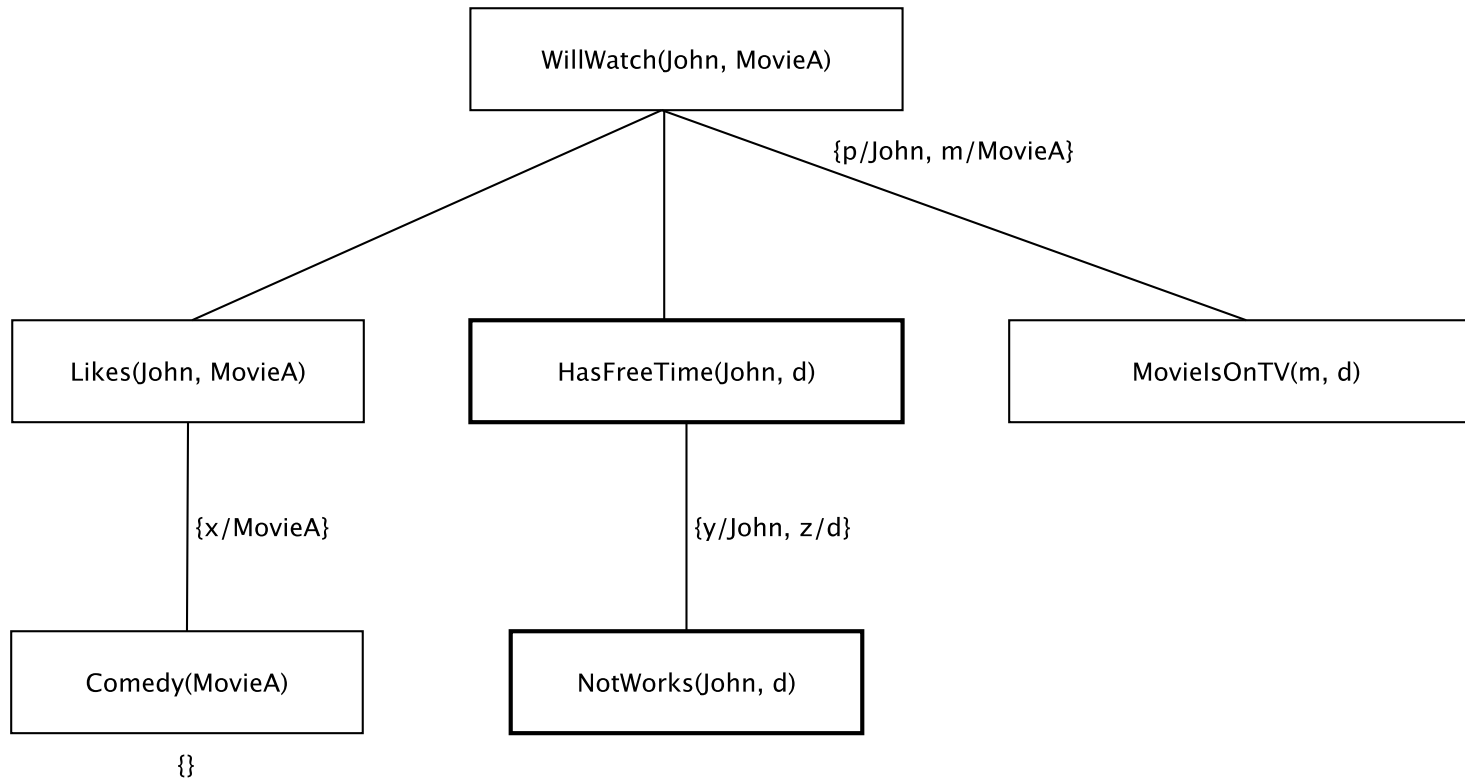
$$\theta = \{p/\text{John}, m/\text{MovieA}, x/\text{MovieA}\}$$

Προς τα Πίσω Αλυσίδα Εκτέλεσης



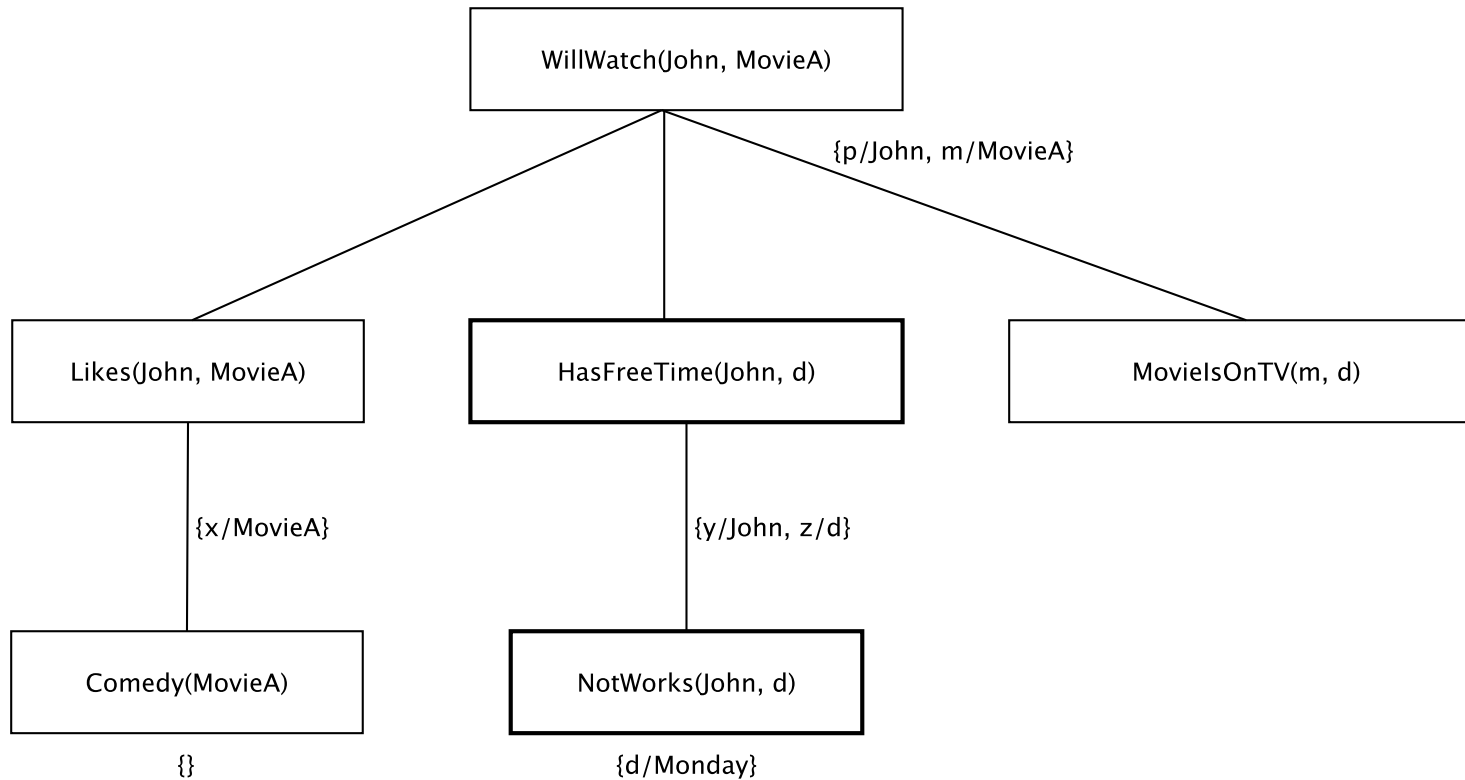
$$\theta = \{p/John, m/MovieA, x/MovieA\}$$

Προς τα Πίσω Αλυσίδα Εκτέλεσης



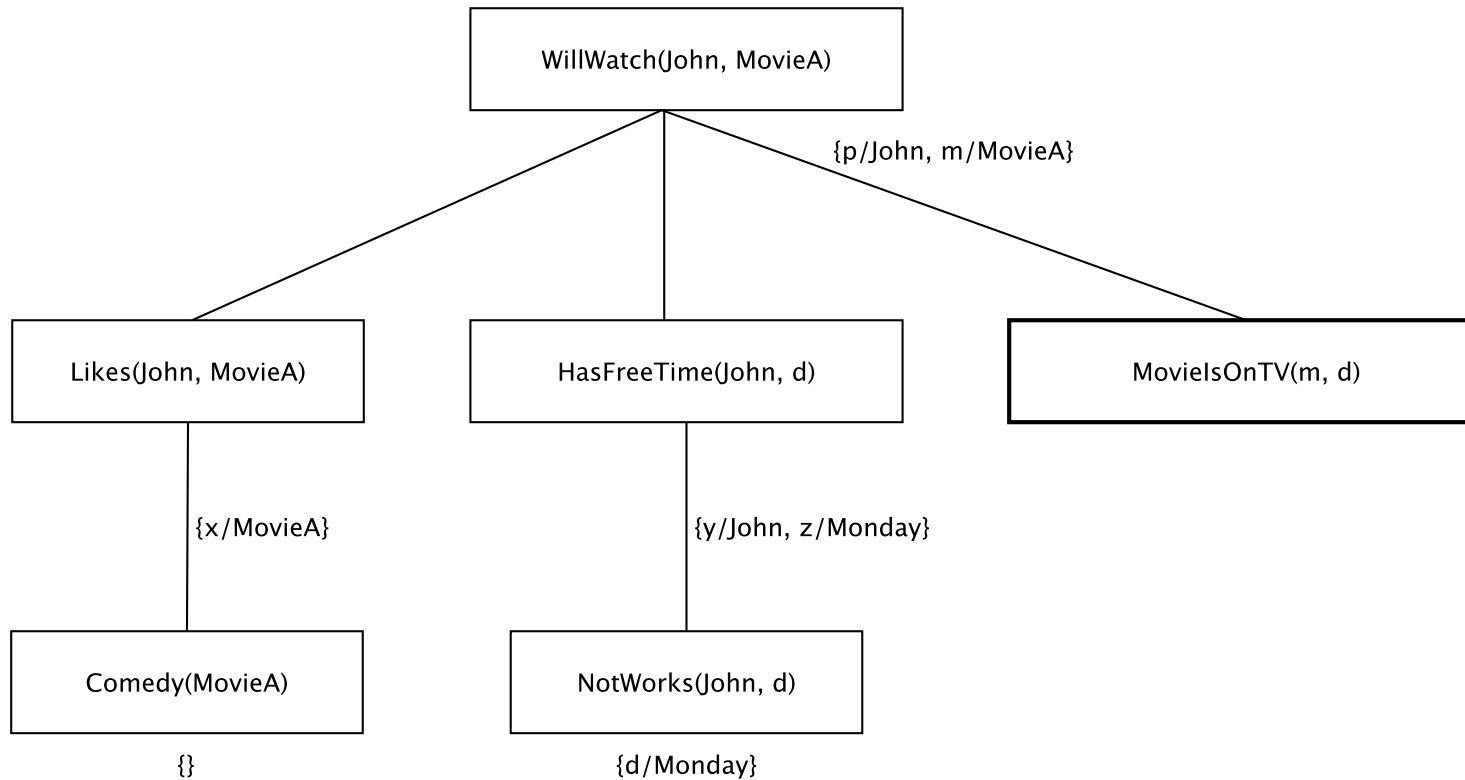
$$\theta = \{p/\text{John}, m/\text{MovieA}, x/\text{MovieA}, y/\text{John}, z/d\}$$

Προς τα Πίσω Αλυσίδα Εκτέλεσης



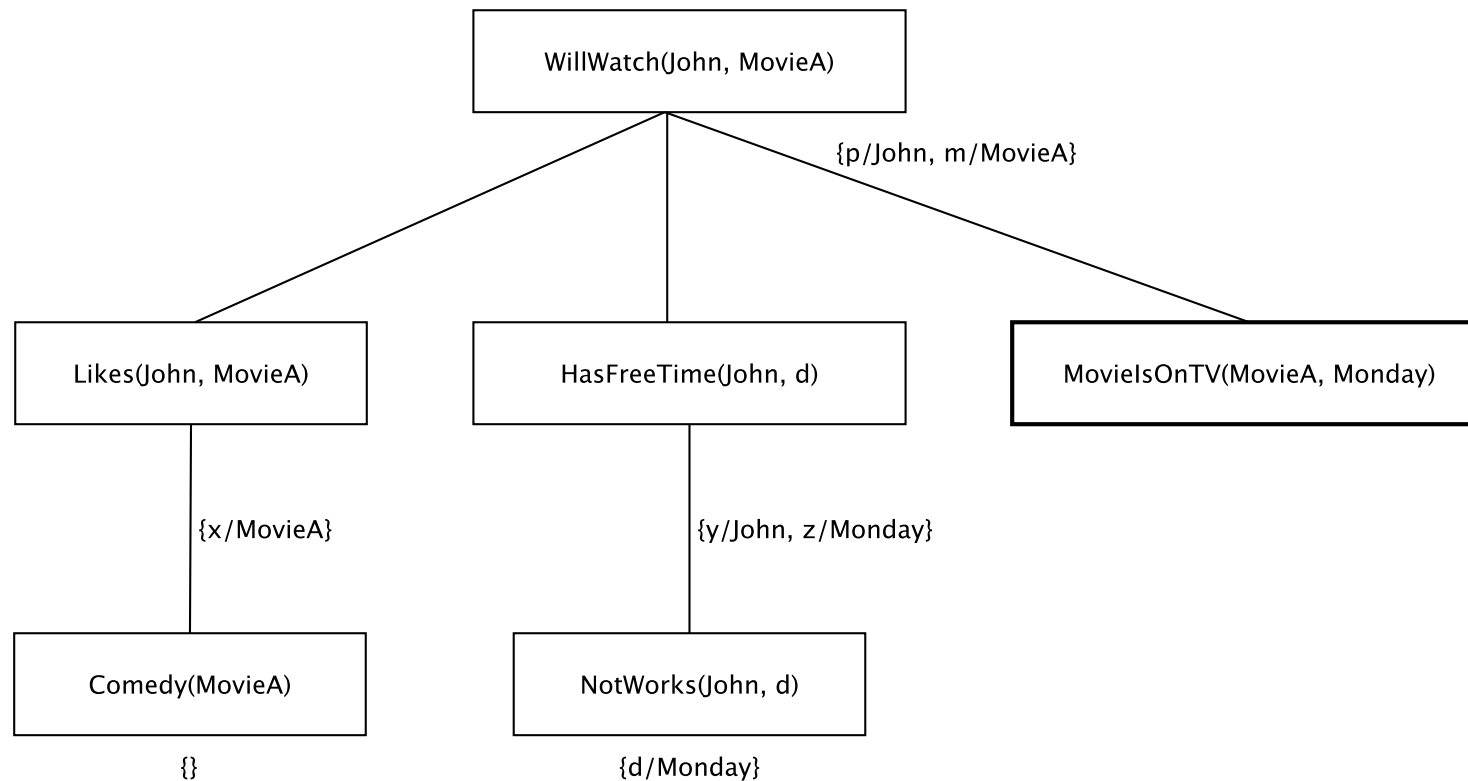
$$\theta = \{p/\text{John}, m/\text{MovieA}, x/\text{MovieA}, y/\text{John}, z/d\}$$

Προς τα Πίσω Αλυσίδα Εκτέλεσης



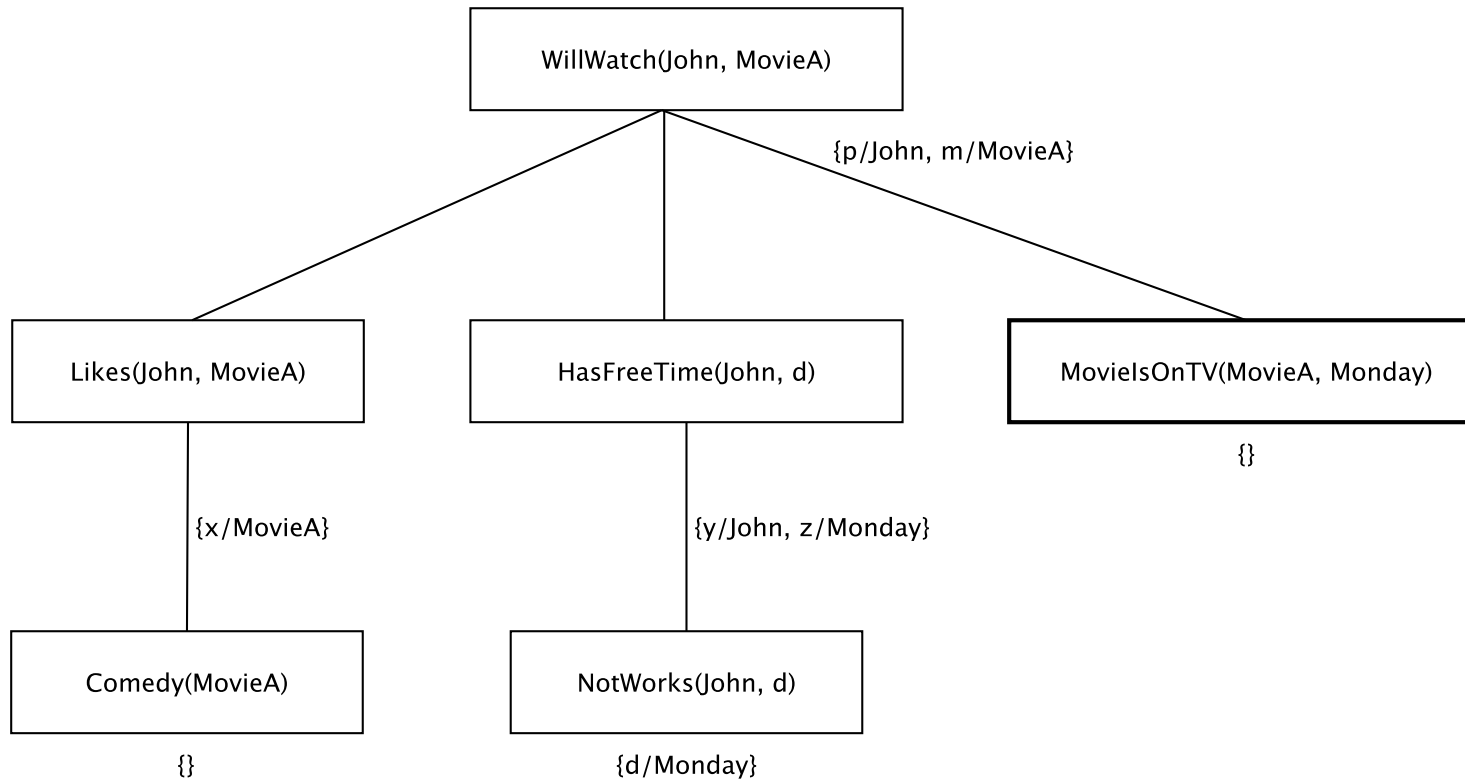
$$\theta = \{p/\text{John}, m/\text{MovieA}, x/\text{MovieA}, y/\text{John}, z/d\}$$

Προς τα Πίσω Αλυσίδα Εκτέλεσης



$$\theta = \{p/\text{John}, m/\text{MovieA}, x/\text{MovieA}, y/\text{John}, z/\text{Monday}, d/\text{Monday}\}$$

Προς τα Πίσω Αλυσίδα Εκτέλεσης



$$\theta = \{p/\text{John}, m/\text{MovieA}, x/\text{MovieA}, y/\text{John}, z/\text{Monday}, d/\text{Monday}\}$$

Προς τα Πίσω Αλυσίδα Εκτέλεσης

Τελικά, ο αλγόριθμος FOL-BC-ASK επιστρέφει το επόμενο σύνολο αντικαταστάσεων:

$$\{ \{p/\text{John}, m/\text{MovieA}, x/\text{MovieA}, y/\text{John}, z/\text{Monday}, d/\text{Monday}\} \}$$

Το σύνολο αυτό έχει ένα μόνο στοιχείο (δηλ., μία μόνο αντικατάσταση). Σε ποιά περίπτωση θα είχε περισσότερα στοιχεία;

Τροφή για Σκέψη

- Με τη μέθοδο της προς τα εμπρός αλυσίδας εκτέλεσης καταφέραμε να αποδείξουμε ότι 'ο Γιάννης θα δει την ταινία MovieA'. Οδηγηθήκαμε σε αυτό το συμπέρασμα, όμως, χωρίς να ήταν αυτός ο στόχος μας.
- Με τη μέθοδο της προς τα πίσω αλυσίδας εκτέλεσης ρωτήσαμε ρητά αν αληθεύει το γεγονός ότι 'ο Γιάννης θα δει την ταινία MovieA'. Η απόδειξη που δώσαμε οδηγήθηκε από τον ίδιο το στόχο μας.

Κανόνας Συμπερασμού Ανάλυσης

Έστω p_1, \dots, p_k και q_1, \dots, q_n λεκτικά της λογικής πρώτης τάξης.

$$\frac{p_1 \vee \dots \vee p_k, q_1 \vee \dots \vee q_n}{SUBST(\theta, p_1 \vee \dots \vee p_{i-1} \vee p_{i+1} \dots \vee p_k \vee q_1 \vee \dots \vee q_{j-1} \vee q_{j+1} \dots \vee q_n)}$$

όπου αν το λεκτικό p_i είναι θετικό, τότε το q_j είναι αρνητικό (και τούμπαλιν) και ισχύει ότι $UNIFY(p_i, \neg q_j) = \theta$.

Το Άγιο Δισκοπότηρο των Monty Python

1. Κάθε γυναίκα που μπορεί να καεί είναι μάγισσα.
2. Καθελί που είναι φτιαγμένο από ξύλο μπορεί να καεί.
3. Καθελί που επιπλέει είναι φτιαγμένο από ξύλο.
4. Καθελί που ζυγίζει το ίδιο με κάτι που επιπλέει, επιπλέει και αυτό.
5. Αυτό το κορίτσι είναι γυναίκα.
6. Αυτό το κορίτσι ζυγίζει το ίδιο με αυτή την πάπια.
7. Αυτή η πάπια επιπλέει.

? Είναι αυτό το κορίτσι μάγισσα;

Αναπαράσταση σε Λογική Πρώτης Τάξης

1. $(\forall x)(Burns(x) \wedge Woman(x) \Rightarrow Witch(x))$
 2. $(\forall x)(Ismadeofwood(x) \Rightarrow Burns(x))$
 3. $(\forall x)(Floats(x) \Rightarrow Ismadeofwood(x))$
 4. $(\forall x)(\forall y)((Floats(x) \wedge Sameweight(x, y)) \Rightarrow Floats(y))$
 5. $Woman(Girl)$
 6. $Sameweight(Duck, Girl)$
 7. $Floats(Duck)$
- ? $Witch(Girl)$

Μετατροπή σε CNF – Απαλοιφή Συνεπαγωγών

1. $(\forall x)(\neg Burns(x) \vee \neg Woman(x) \vee Witch(x))$
 2. $(\forall x)(\neg Ismadeofwood(x) \vee Burns(x))$
 3. $(\forall x)(\neg Floats(x) \vee Ismadeofwood(x))$
 4. $(\forall x)(\forall y)(\neg Floats(x) \vee \neg Sameweight(x, y) \vee Floats(y))$
 5. $Woman(Girl)$
 6. $Sameweight(Duck, Girl)$
 7. $Floats(Duck)$
- ? $Witch(Girl)$

Μετατροπή σε CNF – Μετακίνηση Άρνησης Προς τα Μέσα

1. $(\forall x)(\neg Burns(x) \vee \neg Woman(x) \vee Witch(x))$
 2. $(\forall x)(\neg Ismadeofwood(x) \vee Burns(x))$
 3. $(\forall x)(\neg Floats(x) \vee Ismadeofwood(x))$
 4. $(\forall x)(\forall y)(\neg Floats(x) \vee \neg Sameweight(x, y) \vee Floats(y))$
 5. $Woman(Girl)$
 6. $Sameweight(Duck, Girl)$
 7. $Floats(Duck)$
- ? $Witch(Girl)$

Μετατροπή σε CNF – Προτυποποίηση Μεταβλητών

1. $(\forall x_1)(\neg Burns(x_1) \vee \neg Woman(x_1) \vee Witch(x_1))$
 2. $(\forall x_2)(\neg Ismadeofwood(x_2) \vee Burns(x_2))$
 3. $(\forall x_3)(\neg Floats(x_3) \vee Ismadeofwood(x_3))$
 4. $(\forall x_4)(\forall y_1)(\neg Floats(x_4) \vee \neg Sameweight(x_4, y_1) \vee Floats(y_1))$
 5. $Woman(Girl)$
 6. $Sameweight(Duck, Girl)$
 7. $Floats(Duck)$
- ? $Witch(Girl)$

Μετατροπή σε CNF – Skolemization

1. $(\forall x_1)(\neg Burns(x_1) \vee \neg Woman(x_1) \vee Witch(x_1))$
 2. $(\forall x_2)(\neg Ismadeofwood(x_2) \vee Burns(x_2))$
 3. $(\forall x_3)(\neg Floats(x_3) \vee Ismadeofwood(x_3))$
 4. $(\forall x_4)(\forall y_1)(\neg Floats(x_4) \vee \neg Sameweight(x_4, y_1) \vee Floats(y_1))$
 5. $Woman(Girl)$
 6. $Sameweight(Duck, Girl)$
 7. $Floats(Duck)$
- ? $Witch(Girl)$

Μετατροπή σε CNF – Αφαίρεση Καθολικών Ποσοδεικτών

1. $(\neg Burns(x_1) \vee \neg Woman(x_1) \vee Witch(x_1))$
 2. $(\neg Ismadeofwood(x_2) \vee Burns(x_2))$
 3. $(\neg Floats(x_3) \vee Ismadeofwood(x_3))$
 4. $(\neg Floats(x_4) \vee \neg Sameweight(x_4, y_1) \vee Floats(y_1))$
 5. $Woman(Girl)$
 6. $Sameweight(Duck, Girl)$
 7. $Floats(Duck)$
- ? $Witch(Girl)$

Μετατροπή σε CNF – Κατανομή \vee ως προς \wedge

1. $\neg Burns(x_1) \vee \neg Woman(x_1) \vee Witch(x_1)$
 2. $\neg Ismadeofwood(x_2) \vee Burns(x_2)$
 3. $\neg Floats(x_3) \vee Ismadeofwood(x_3)$
 4. $\neg Floats(x_4) \vee \neg Sameweight(x_4, y_1) \vee Floats(y_1)$
 5. $Woman(Girl)$
 6. $Sameweight(Duck, Girl)$
 7. $Floats(Duck)$
- ? $Witch(Girl)$

Έναρξη Απόδειξης με Ανάλυση

Για να αποδείξουμε την αλήθεια ενός τύπου ϕ εισάγουμε την άρνησή του στη βάση γνώσης. Αν η ϕ έπεται λογικά από τη βάση γνώσης μας (είναι αληθής), τότε, εισάγοντας την άρνησή της και εφαρμόζοντας τον κανόνα της ανάλυσης, θα πρέπει να οδηγηθούμε στην παραγωγή της κενής πρότασης (άτοπο).

Η άρνηση της πρότασης που θέλουμε να αποδείξουμε είναι η επόμενη:

$$\neg Witch(Girl)$$

Εφαρμογή Κανόνα Ανάλυσης $\neg \text{Witch}(\mathbf{Girl})$ $\neg \text{Burns}(x_1) \vee \neg \text{Woman}(x_1) \vee \text{Witch}(\mathbf{x}_1)$ $\neg \text{Ismadeofwood}(x_2) \vee \text{Burns}(\mathbf{x}_2)$ $\neg \text{Burns}(\mathbf{Girl}) \vee \neg \text{Woman}(\mathit{Girl})$ $\text{Woman}(\mathbf{Girl})$ $\neg \text{Ismadeofwood}(\mathit{Girl}) \vee \neg \text{Woman}(\mathbf{Girl})$ $\neg \text{Floats}(x_3) \vee \text{Ismadeofwood}(\mathbf{x}_3)$ $\neg \text{Ismadeofwood}(\mathbf{Girl})$

Εφαρμογή Κανόνα Ανάλυσης

$$\neg Floats(x_4) \vee \neg Sameweight(x_4, y_1) \vee Floats(y_1)$$
$$\neg Floats(\mathbf{Girl})$$
$$Sameweight(\mathbf{Duck}, \mathbf{Girl})$$
$$\neg Sameweight(\mathbf{x}_4, \mathbf{Girl}) \vee \neg Floats(x_4)$$
$$\mathbf{Floats(Duck)}$$
$$\neg \mathbf{Floats(Duck)}$$
$$\emptyset$$

Μελέτη

1. Ο αλγόριθμος της ενοποίησης είναι από το βιβλίο των Michael Genesereth και Nils J. Nilsson, “Logical Foundations of Artificial Intelligence” 1987, εκδόσεις Morgan Kauffman.
2. Οι Monty Python και το Άγιο Δισκοπότηρο είναι μία ταινία του 1974 από τους Monty Python. Μπορείτε να βρείτε τον πρωτότυπο διάλογο στη σελίδα http://en.wikiquote.org/wiki/Monty_Python_and_the_Holy_Grail#The_Witch. Μπορείτε να βρείτε, επίσης, την αντίστοιχη σκηνή στο σύνδεσμο http://www.youtube.com/watch?v=zrzMhU_4m-g. Η σελίδα της ταινίας στο IMDB είναι η <http://www.imdb.com/title/tt0071853/>.