Άσκηση

Θεωρήστε τον κόσμο που φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα:

Άσκηση

Θεωρήστε τώρα τις εξής προτάσεις που αναφέρονται στον κόσμο της εικόνας

$\varphi_1 : Male(Obama)$

$\varphi_2 : \neg Female(Hilary)$

$\varphi_3 : (\forall x)(\forall y)(x \neq y \Rightarrow SitsTogetherWith(x, y))$

Ερμηνεία I για την παραπάνω εικόνα

- Αρχικά ορίζουμε το πεδίο της I, που περιέχει τα αντικείμενα της εικόνας, δηλαδή:

$$|I| = \{\text{Ομπάμα}, \text{Χίλαρι}\}.$$

- Για τα σύμβολα σταθερών, η I κάνει τις εξής αντιστοιχίσεις:

$$Obama^I = \text{Ομπάμα},\ Hilary^I = \text{Χίλαρι}$$

Ερμηνεία I για την παραπάνω εικόνα

- Η I αντιστοιχίζει στο μοναδιαίο σύμβολο κατηγορήματος $Male$ την ακόλουθη μοναδιαία σχέση:

$$\{\langle \text{Ομπάμα} \rangle\}$$

- Η I αντιστοιχίζει στο μοναδιαίο σύμβολο κατηγορήματος $Female$ την ακόλουθη μοναδιαία σχέση:

$$\{\langle \text{Χίλαρι} \rangle\}$$

- Η I αντιστοιχίζει στο δυαδικό σύμβολο κατηγορήματος $SitsTogetherWith$ την ακόλουθη δυαδική σχέση:

$$\{\langle \text{Ομπάμα}, \text{Χίλαρι} \rangle, \langle \text{Χίλαρι}, \text{Ομπάμα} \rangle\}$$

Ποιοι τύποι ικανοποιούνται από την I

Για τον τύπο φ_1, από τον ορισμό της ικανοποίησης έχουμε:

$$\models_I Male(Obama)[s] \;\text{ αν ν }\; \langle \overline{s}(Obama) \rangle \in Male^I$$

Όμως

$$\overline{s}(Obama) = Obama^I = \text{Ομπάμα}$$

και

$$Male^I = \{\langle \text{Ομπάμα} \rangle\}$$

Άρα το παραπάνω ισχύει και συνεπώς ο φ_1 ικανοποιείται από την I.

Ποιοι τύποι ικανοποιούνται από την I

Για τον τύπο φ_2, από τον ορισμό της ικανοποίησης στην περίπτωση της άρνησης ενός τύπου έχουμε:

$$\models_I \neg Female(Hilary)[s]$$

ανν

$$\not\models_I Female(Hilary)[s]$$

δηλαδή ανν δεν ισχύει η σχέση

$$\models_I Female(Hilary)[s]$$

Όμως η τελευταία σχέση ισχύει, αφού

$$\overline{s}(Hilary) = Hilary^I = \text{Χίλαρι και}$$

$$Female^I = \{\langle \text{Χίλαρι} \rangle\}$$

Άρα ο φ_1 δεν ικανοποιείται από την I.

Ποιοι τύποι ικανοποιούνται από την I

Για τον τύπο φ_3, έχουμε:

$$\models_I ((\forall x)(\forall y)(x \neq y \Rightarrow SitsTogetherWith(x,y)))[s]$$

που ισχύει ανν για κάθε $d_x, d_y \in |I|$

$$\models_I (x \neq y \Rightarrow SitsTogetherWith(x,y))[s(x|d_x, y|d_y)]$$

που ισχύει ανν για κάθε $d_x, d_y \in |I|$

$$\not\models_I (x \neq y)[s(x|d_x, y|d_y)]$$

ή

$$\models_I (SitsTogetherWith(x,y))[s(x|d_x, y|d_y)]$$

που ισχύει ανν για κάθε $d_x, d_y \in |I|$

$$\models_I (x = y)[s(x|d_x, y|d_y)]$$

ή

$$\models_I (SitsTogetherWith(x, y))[s(x|d_x, y|d_y)]$$

Δεδομένου ότι για το πεδίο της I είναι

$$|I| = \{\text{Ομπάμα},\ \text{Χίλαρι}\}$$

υπάρχουν 4 δυνατές περιπτώσεις σχετικά με την ανάθεση τιμών στις μεταβλητές x και y:

(α′) στην x ανατίθεται η τιμή Ομπάμα και στην y η τιμή Ομπάμα

(β′) στην x ανατίθεται η τιμή Χίλαρι και στην y η τιμή Χίλαρι

(γ′) στην x ανατίθεται η τιμή Ομπάμα και στην y η τιμή Χίλαρι

(δ′) στην x ανατίθεται η τιμή Χίλαρι και στην y η τιμή Ομπάμα

Στην περίπτωση α′ ισχύει ότι

$$\models_I (x = y)[s(x|\text{Ομπάμα}, y|\text{Ομπάμα})]$$

αφού

$$s(x|\text{Ομπάμα}, y|\text{Ομπάμα})(x) = \text{Ομπάμα} = s(x|\text{Ομπάμα}, y|\text{Ομπάμα})(y)$$

Ανάλογα εργαζόμαστε και για την περίπτωση β′.

Στην περίπτωση γ′ ισχύει ότι

$$\models_I (SitsTogetherWith(x, y))[s(x|d_x, y|d_y)]$$

αφού

$$\langle s(x|\text{Ομπάμα}, y|\text{Χίλαρι})(x), s(x|\text{Ομπάμα}, y|\text{Ομπάμα})(y)\rangle =$$

$$\langle \text{Ομπάμα}, \text{Χίλαρι}\rangle \in SitsTogetherWith^I$$

Ανάλογα εργαζόμαστε και για την περίπτωση δ′.

Άρα σε κάθε περίπτωση ο τύπος φ_3 ικανοποιείται από την I.